

Lösungen

der Aufgaben aus MARTIN NITSCHKE¹, *Geometrie*, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 1. Auflage 2005, 2. Auflage 2014

Bearbeitungsstand: 13.12.2016

Notation Aus zwei Zahlen bestehende Bild-, Formel-, Satz- und Aufgabennummern (etwa 2.6) beziehen sich auf das oben genannte Buch. Bilder und Formeln in der vorliegenden Lösungszusammenstellung sind dagegen stets mit einer Zahl bezeichnet.

1.1 Nein, auch durch vier Seitenlängen und einen Innenwinkel ist ein Viereck nicht eindeutig bestimmt.

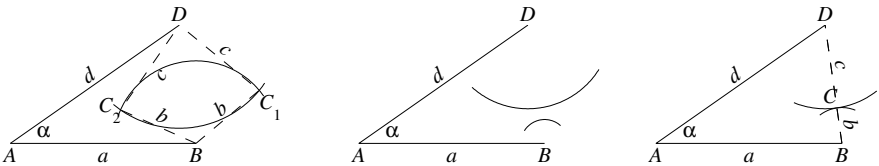




Bild 1: Viereckskonstruktion zu vier Seitenlängen und einen Innenwinkel

 ViereckInnenwinkel.m
 ViereckInnenwinkel.pdf

Begründung: In Bild 1 sind die Seitenlängen a, b, c, d und der Winkel α zwischen den Seiten mit den Längen a und b gegeben. Zur Konstruktion beginnt man mit der Seite der Länge a und nennt deren Eckpunkte A und B . Nun trägt man an dieser Seite in A den Winkel α an und erhält auf dessen freiem Schenkel im Abstand d den Eckpunkt D . Zur Konstruktion des fehlenden Eckpunktes C schlägt man einen Kreis um D mit dem Radius c und einen weiteren Kreis um B mit dem Radius b . Da sich — bei der Situation in der linken Konstruktion aus Bild 1 — die beiden Kreise in zwei Punkten schneiden, gibt es hier zwei Varianten für den fehlenden Eckpunkt C . Sind die Ausgangsdaten jedoch so beschaffen, dass sich die beiden Kreise nicht schneiden (Bild 1, mittlere Konstruktion), so gibt es kein Viereck zu diesen Daten. Nur in dem Spezialfall, dass sich die Kreise in genau einem Punkt berühren, ist das

¹Hochschule Neubrandenburg, nitschke@hs-nb.de

Viereck eindeutig, degeneriert aber zu einem Dreieck (Bild 1, rechte Konstruktion).

1.2 1. r 2. f 3. f 4. r 5. r 6. r 7. f 8. f

1.3 Im **rechtwinkligen Dreieck** ist der Höhenschnittpunkt identisch mit der zum rechten Winkel gehörenden Ecke (Bild 2, erste Konstruktion; zwei der drei Höhen stimmen mit den dieser Ecke anliegenden Seiten [Katheten] überein). Der Umkreismittelpunkt befindet sich dann auf der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite (Hypotenuse) (Bild 2, zweite Konstruktion). Im **stumpfwinkligen Dreieck** liegen Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks (Bild 2, dritte und vierte Konstruktion). In **allen Fällen** liegen Schwerpunkt und Inkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks.

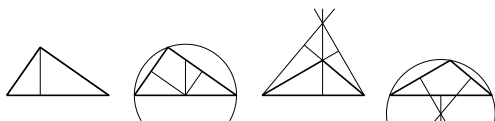


Bild 2: Höhenschnittpunkt und Umkreismittelpunkt im recht- und stumpfwinkligen Dreieck

RechtStumpf3eckHM.m
RechtStumpf3eckHM.pdf

1.4 1. In beiden Fällen gibt es drei Lösungen → Bild 3.

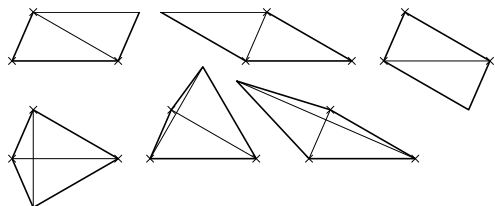


Bild 3: Ergänzung dreier Punkte zu einem Parallelogramm bzw. Drachenviereck

ParDra.m
ParDra.pdf

2. (a) f (b) r (c) f (d) r (e) r (f) r (g) f (h) r (i) r

1.5 1. f 2. r 3. r 4. f 5. f 6. r 7. f 8. f 9. r 10. f 11. r 12. r 13. f

1.6 1. falsch; vgl. auch Bild 1.3
2. r 3. f 4. r 5. r 6. f 7. r 8. f 9. f 10. r 11. r

1.7 1. f 2. r 3. f 4. f 5. f 6. f 7. r 8. r

1.8 1. Nein, die Summe von je zwei Seitenlängen muss größer als die dritte sein (**Dreiecksungleichung**). Ist dies der Fall, so beginnt man die Konstruktion mit einer der drei Seiten. Um die beiden Endpunkte schlägt man Kreise mit den beiden anderen Seitenlängen als Radien. Ist die Dreiecksungleichung erfüllt, so schneiden sich die beiden Kreise in zwei

Punkten und man erhält zwei Dreiecke, die jedoch (gegensinnig) kongruent sind (Bild 4, erste Konstruktion). Bei nicht erfüllter Dreiecksungleichung haben die beiden Kreise keinen Schnittpunkt, und es existiert kein Dreieck zu den gegebenen Seitenlängen (Bild 4, zweite Konstruktion).

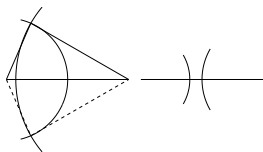




Bild 4: zum Kongruenzsatz SSS

 DreieckSSS.m
 DreieckSSS.pdf

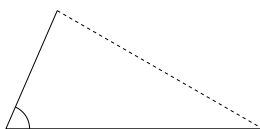




Bild 5: zum Kongruenzsatz SWS

 DreieckSWS.m
 DreieckSWS.pdf

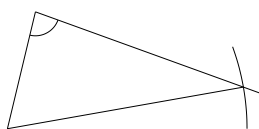




Bild 6: zum Kongruenzsatz SsW

 DreieckSsW.m
 DreieckSsW.pdf

2. Ja, falls der eingeschlossene Winkel kleiner als 180° ist. Die Konstruktion ist in Bild 5 dargestellt und beginnt mit einer der gegebenen Seiten. An diese legt man den gegebenen Winkel an und trägt die Länge der anderen Seite an. Nun sind alle Ecken des Dreiecks und damit das Dreieck konstruiert.

3. a) Ja, falls der gegebene Winkel kleiner als 180° ist. Die in Bild 6 durchgeführte Konstruktion beginnt mit der kleineren gegebenen Seite. An diese legt man den gegebenen Winkel an. Um den diesem Winkel gegenüberliegenden Endpunkt der kleineren gegebenen Seite schlägt man einen Kreis, dessen Radius die Länge der größeren Seite ist. Dieser Kreis schneidet den freien Schenkel des Winkels in genau einem Punkt. Dies ist der fehlende Eckpunkt des Dreiecks.

b) Nein. Bei einer zu Bild 6 analogen Konstruktion schneidet der Kreis den freien Schenkel je nach Größe des Winkels nicht (Bild 7, 1. Konstruktion) oder in zwei Punkten (Bild 7, 2. Konstruktion). Nur in dem Spezialfall, dass der Kreis den freien Schenkel in einem Punkt (tangential) berührt, ist das Dreieck eindeutig (Bild 7, 3. Konstruktion).

Bemerkung: In Satz 1.9 wird diese Situation detaillierter behandelt.

4. Nein, die Summe der beiden anliegenden Winkel muss kleiner als 180° sein. Ist dies der Fall, so beginnt man die Konstruktion mit der gegebenen Seite. An die beiden Endpunkte legt man die gegebenen

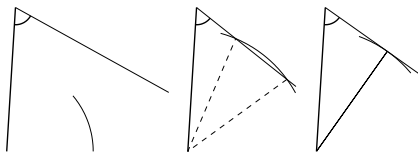


Bild 7: zur Situation sSW

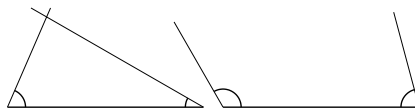
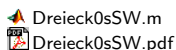


Bild 8: zum Kongruenzsatz WSW



Winkel an. Ist deren Summe kleiner als 180° , so schneiden sich die freien Schenkel in einem Punkt und man erhält ein eindeutig bestimmtes Dreieck (Bild 8, erste Konstruktion). Ist die Summe der gegebenen Winkel größer oder gleich 180° , so haben die beiden freien Schenkel keinen Schnittpunkt, und es existiert kein Dreieck zu den gegebenen Seitenlängen (Bild 8, zweite Konstruktion).

1.9 Mit den Bezeichnungen aus Bild 1.33 gilt aus Symmetriegründen

$$A_{S1} + A_{S2} + A_D = A_H. \tag{1}$$

Wegen des erweiterten Satzes von PYTHAGORAS (insbesondere vorletzte Figur in der oberen Reihe von Bild 1.32) ist ferner

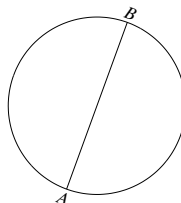
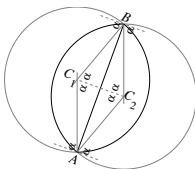
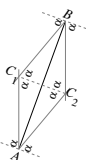
$$(A_{S1} + A_{M1}) + (A_{S2} + A_{M2}) = A_H. \tag{2}$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen folgt $A_D - A_{M1} - A_{M2} = 0$ und damit schließlich $A_D = A_{M1} + A_{M2}$.

1.10 1. Die Konstruktion aus Bild 1.38(a) ist für den Winkel $\alpha = 180^\circ - \delta$ durchzuführen (Bild 9(a)). Von den Teilen der wie in Bild 1.38(b) konstruierten Kreislinien, die auf der dem jeweiligen Mittelpunkt *abgewandten* Seite von \overline{AB} liegen, erscheint dann die Strecke \overline{AB} unter dem Winkel $180^\circ - \alpha = \delta$ (Bild 9(b)).

2. Nach dem Satz von THALES erscheint von jedem Punkt der Kreislinie, deren Durchmesser die Strecke \overline{AB} ist, diese Strecke unter einem rechten Winkel (Bild 10).

1.11 Da die Strecke \overline{HL} unter einem Winkel von 22° zu sehen ist, befindet sich das Schiff auf dem betreffenden Ortskreis (Bild 11(a)). Ebenso befindet es sich auf dem Ortskreis zu \overline{HK} mit dem Sehwinkel 40° (Bild 11(b)). Diese beiden Ortskreise schneiden sich in insgesamt vier Punkten (Bild 11(c)). Von zwei dieser Punkte (in Bild 11(c) mit \bullet markiert) wird die Strecke \overline{LK} unter dem Winkel $40^\circ - 22^\circ = 18^\circ$ gesehen;



(a) Mittelpunkte

(b) Kreislinien

Bild 9: Ortskreise für stumpfe Winkel

Ortskreis.m
 Ortskreis.pdf

Bild 10: THALES-Kreis als Ortskreis für rechte Winkel

Ortskreis.m
 Ortskreis.pdf

nur von den beiden mit • gekennzeichneten Punkten liegt der verlangte Sehewinkel $40^\circ + 22^\circ = 62^\circ$ vor. Das Schiff befindet sich also auf einem dieser beiden Punkte — auf welchem der beiden, geht aus den vorliegenden Informationen nicht hervor. In vielen Fällen ist jedoch die Position näherungsweise bekannt, oder eine der Lösungen liegt auf dem Festland; so dass dann klar ist, welcher der beiden Punkte die exakte Position beschreibt.

1.12 Die Mantelfläche eines geraden Kreiskegels entsteht durch Rotation einer **Mantellinie** um die Achse des Kegels (Bild 12). Unter Mantellinien versteht man dabei die Strecken zwischen der Spitze des Kegels und den Punkten auf dem Grundkreisumfang. Der Schwerpunkt S einer Mantellinie ist offensichtlich ihr Mittelpunkt: Ist m die Länge der Mantellinie, so ist der Abstand vom Schwerpunkt zur Spitze und zum Grundkreisumfang jeweils $m/2$. Für den Radius r_S des von S bei der Drehung beschriebenen Kreises gilt nach dem zweiten Strahlensatz (1.17):

$$\frac{r_S}{r} = \frac{m/2}{m} = \frac{1}{2} \Rightarrow r_S = \frac{r}{2}. \tag{3}$$

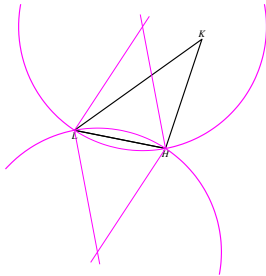
Der Schwerpunkt legt damit einen Weg der Länge

$$U_S = 2\pi r_S \stackrel{(3)}{=} \pi r \tag{4}$$

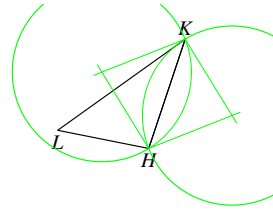
zurück. Die Länge der Mantellinie ergibt sich nach PYTHAGORAS zu

$$m = \sqrt{r^2 + h^2}. \tag{5}$$

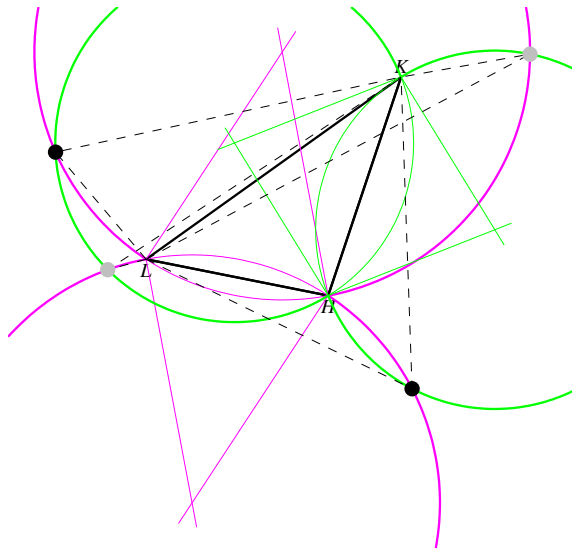
Nach der ersten GULDINSchen Regel folgt dann für die Mantelfläche des geraden Kreiskegels $M_{\text{gerader Kreiskegel}} = U_S m \stackrel{(4),(5)}{=} \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.



(a) Ortskreis zu \overline{LH}

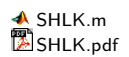


(b) Ortskreis zu \overline{HK}



(c) Vollständige Lösung

Bild 11: zum Schiff-Hafen-Leuchtturm-Kirche-Problem



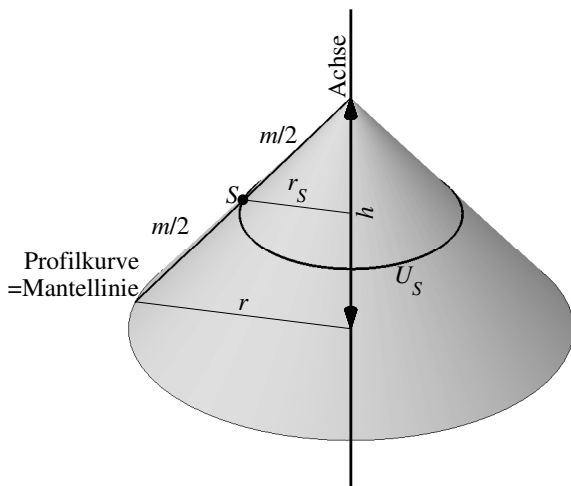
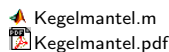


Bild 12: zur Mantelfläche des geraden Kreiskegels



2.1 1. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 (Bild 1.5). Ist M der Mittelpunkt der Strecke \overline{BC} , so ist AM eine Seitenhalbierende und es folgt $S = A + \frac{2}{3}(M - A) \stackrel{M=(B+C)/2}{=} A + \frac{2}{3} \left(\frac{B+C}{2} - A \right) = A + \frac{B+C}{3} - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}(A + B + C) = \begin{pmatrix} 14/3 \\ 14/3 \end{pmatrix}$.

2. a) Mit den Vektoren

$$\mathbf{a} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathbf{b} = C - B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\mathbf{c} = A - C = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{8}$$

erhält man für den fehlenden Punkt D die drei Lösungen

$$D_1 = C + \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$D_2 = A + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$D_3 = B + \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}; \tag{11}$$

vgl. dazu auch Bild 13(a).

b) Im Parallelogramm ABD_1C sind die Seitenlängen

$$|A - C| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \quad (12)$$

$$= \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}, \quad (13)$$

$$|B - A| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \quad (14)$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}, \quad (15)$$

$$|D_1 - B| = |A - C| \stackrel{(13)}{=} 6\sqrt{2}, \quad (16)$$

$$|C - D_1| = |B - A| \stackrel{(15)}{=} 5\sqrt{2}; \quad (17)$$

für das Parallelogramm AD_2CB folgt ähnlich

$$|B - C| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}, \quad (18)$$

$$|C - D_2| = |B - A| \stackrel{(15)}{=} 5\sqrt{2}; \quad (19)$$

$$|D_2 - A| = |B - C| \stackrel{(18)}{=} \sqrt{26}; \quad (20)$$

und im Parallelogramm AD_3BC ist

$$|A - D_3| = |B - C| \stackrel{(18)}{=} \sqrt{26}; \quad (21)$$

$$|D_3 - B| = |A - C| \stackrel{(13)}{=} 6\sqrt{2}. \quad (22)$$

c) Der Umfang ist jeweils die Summe der Seitenlängen, also gilt

$$\text{im Parallelogramm } ABD_1C: U = 22\sqrt{2}, \quad (23)$$

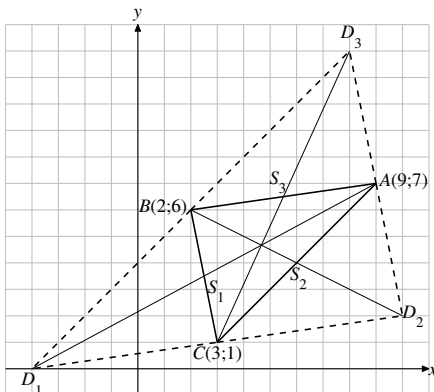
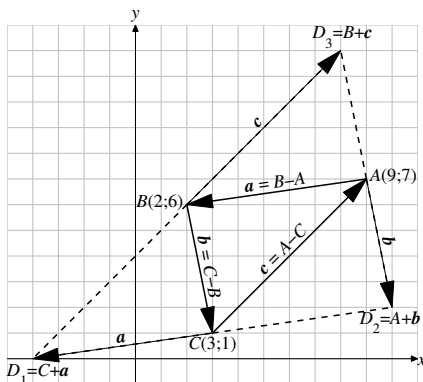
$$\text{im Parallelogramm } AD_2CB: U = 2\sqrt{26} + 10\sqrt{2}, \quad (24)$$

$$\text{im Parallelogramm } AD_3BC: U = 2\sqrt{26} + 12\sqrt{2}. \quad (25)$$

d) Im Parallelogramm ABD_1C haben die Diagonalen die Längen

$$|A - D_1| = \sqrt{13^2 + 7^2} = \sqrt{218}, \quad (26)$$

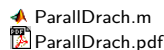
$$|B - C| \stackrel{(18)}{=} \sqrt{26}; \quad (27)$$



(a) zu a), b), c) und e)

(b) zu d) und f)

Bild 13: zu Aufgabe 2.1



für das Parallelogramm AD_2CB ist entsprechend

$$|B - D_2| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}, \tag{28}$$

$$|A - C| \stackrel{(13)}{=} 6\sqrt{2}; \tag{29}$$

und im Parallelogramm AD_3BC

$$|C - D_3| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix} \right| \tag{30}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (-11)^2} = \sqrt{146}, \tag{31}$$

$$|B - A| \stackrel{(15)}{=} 5\sqrt{2}. \tag{32}$$

e) Jedes der drei Parallelogramme ist durch Verdopplung des Dreiecks ABC entstanden. Der Flächeninhalt eines der Parallelogramme ist also gleich der doppelten Dreiecksfläche. Dieser lässt sich mit der HERONISCHEN Formel (1.63) berechnen. Mit

$$s = \frac{|B - A| + |C - B| + |A - C|}{2} \tag{33}$$

(15)

(18)

$$\stackrel{(13)}{=} \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{26} + 6\sqrt{2}}{2} = \frac{11\sqrt{2} + \sqrt{26}}{2} \tag{34}$$

gilt dann für die Parallelogrammfläche

$$A_{\text{Par.gr.}} \stackrel{(1.63)}{=} 2\sqrt{s(s-5\sqrt{2})(s-\sqrt{26})(s-6\sqrt{2})} = 36. \quad (35)$$

f) Aus Symmetriegründen schneiden sich die Parallelogrammdiagonalen in ihren Mittelpunkten. Für die Schnittpunkte S_1, S_2, S_3 (Bild 13(b)) in den drei Parallelogrammen gilt daher

$$S_1 = C + \frac{1}{2}(B - C) = \frac{1}{2}(B + C) \quad (36)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \end{pmatrix}, \quad (37)$$

und analog

$$S_2 = A + \frac{1}{2}(C - A) = \frac{1}{2}(C + A) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

$$S_3 = B + \frac{1}{2}(A - B) = \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 6,5 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

2.2

$90^\circ 00' 00''$	$= 90,0^\circ$	$= 100,0$	gon	$= \frac{\pi}{2}$	rad
$37^\circ 12' 05''$	$= 37,2014^\circ$	$= 41,3349$	gon	$= 0,6493$	rad
$45^\circ 00' 00''$	$= 45,0^\circ$	$= 50,0$	gon	$= \frac{\pi}{4}$	rad
$30^\circ 00' 00''$	$= 30,0^\circ$	$= 33,\bar{3}$	gon	$= \frac{\pi}{6}$	rad
$148^\circ 50' 34,7''$	$= 148,8430^\circ$	$= 165,3811$	gon	$= 2,5978$	rad

2.3 1. $\mathbf{v} = Q - P = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}.$

2. Wir berechnen zunächst $\mathbf{v}^0 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{155}} = \frac{1}{\sqrt{155}} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}.$ Für

die Winkel $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ zur x -, y -, z -Richtung ist nun

$$\alpha_x = \arccos \left(\mathbf{v}^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \arccos \left(-\frac{5}{\sqrt{155}} \right) = 113^\circ 40' 44'',$$

$$\alpha_y = \arccos \left(\mathbf{v}^0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \arccos \left(\frac{7}{\sqrt{155}} \right) = 55^\circ 47' 18'',$$

$$\alpha_z = \arccos \left(\mathbf{v}^0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \arccos \left(-\frac{9}{\sqrt{155}} \right) = 136^\circ 17' 39''.$$

$$3. Z_1 = P + \frac{1}{3}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_2 = P + \frac{2}{3}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 8/3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2.4 Der EUKLIDISCHE Abstand ist

$$d(A, B) \stackrel{(2.44)}{=} |B - A| \stackrel{(2.10)}{=} \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}. \quad (40)$$

Wie die Klappung aus Bild 14 zeigt, ist nach PYTHAGORAS

$$d_W(A, B) = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5a^2} = a\sqrt{5}. \quad (41)$$

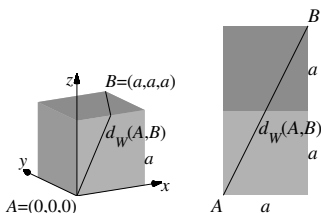


Bild 14: zur Berechnung des geodätischen Abstands zwischen gegenüberliegenden Würfel-ecken

Abstand.m
 Abstand.pdf

2.5 Ist β der im Bogenmaß gemessene Winkel aus Bild 15, so ist $d_S(A, B) \stackrel{(2.42)}{=} R \cdot 2\beta$ und damit

$$\beta = \frac{d_S(A, B)}{2R}. \quad (42)$$

Nach Definition der Sinusfunktion im rechtwinkligen Dreieck ist $\sin \beta = \frac{d(A, B)/2}{R}$, also $d(A, B) = 2R \sin \beta \stackrel{(42)}{=} 2R \sin \frac{d_S(A, B)}{2R}$.

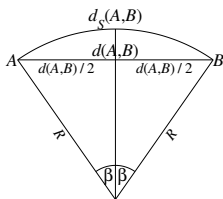


Bild 15: EUKLIDISCHER und SPHÄRISCHER Abstand

EuklSphAbst.m
 EuklSphAbst.pdf

2.6 1. Da mehrere Vektoren zerlegt werden sollen, bieten sich die Beziehungen (2.54) und (2.56) an. Dazu berechnen wir zunächst

$$\mathbf{v}^0 = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{v}^0 \mathbf{v}^{0T} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Daraus folgt für die in Bild 16 dargestellten Projektionen auf \mathbf{v}

$$\text{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \mathbf{P}\mathbf{a} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28/13 \\ 42/13 \end{pmatrix}, \tag{46}$$

und völlig analog

$$\text{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{b}) = \mathbf{P}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20/13 \\ 30/13 \end{pmatrix}, \tag{47} \quad \text{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{d}) = \mathbf{P}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$\text{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{c}) = \mathbf{P}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \tag{48} \quad \text{Proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}) = \mathbf{P}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{50}$$

für die Projektionen auf die zu \mathbf{v} senkrechte Richtung

$$\text{Orth}_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}) = \mathbf{Q}\mathbf{a} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/13 \\ 10/13 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

$$\text{Orth}_{\mathbf{v}}(\mathbf{b}) = \mathbf{Q}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -33/13 \\ 22/13 \end{pmatrix}, \tag{52} \quad \text{Orth}_{\mathbf{v}}(\mathbf{d}) = \mathbf{Q}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

$$\text{Orth}_{\mathbf{v}}(\mathbf{c}) = \mathbf{Q}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{53} \quad \text{Orth}_{\mathbf{v}}(\mathbf{e}) = \mathbf{Q}\mathbf{e} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

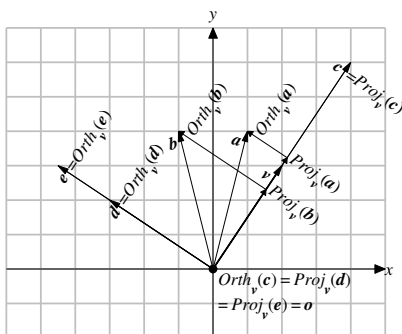




Bild 16: zu Aufgabe 2.6

 OrthZerlAufg.m
 OrthZerlAufg.pdf

2. Da MATLAB auf Matrizen basiert, erhält man einfache Programme, indem man die zu zerlegenden Vektoren spaltenweise in einer Matrix anordnet. Die Aufgabe lässt sich damit numerisch wie folgt lösen:

```

> A=[1 -1 4 -3 -9/2; 4 4 6 2 3];
> v=[2;3];          v0=v/norm(v);
> Proj=v0*v0'*A,    Orth=(eye(2)-v0*v0')*A
Proj =
    2.1538    1.5385    4.0000    0.0000    0.0000
    3.2308    2.3077    6.0000         0         0
Orth =
   -1.1538   -2.5385    0.0000   -3.0000   -4.5000
    0.7692    1.6923    0.0000    2.0000    3.0000  🚩 OrthZerlNum.m
    
```

Bei der symbolischen Behandlung sind die Eingabedaten in symbolische Strukturen zu konvertieren und die Vektorlänge über (2.10) zu berechnen, weil die numerische Funktion norm keine numerischen Argumente akzeptiert.

```

> A=sym([1 -1 4 -3 -9/2; 4 4 6 2 3]);
> v=sym([2;3]);    v0=v/sqrt(dot(v,v));
> Proj=v0*v0'*A,    Orth=(eye(2)-v0*v0')*A
Proj =
 [ 28/13, 20/13, 4, 0, 0]
 [ 42/13, 30/13, 6, 0, 0]
Orth =
 [ -15/13, -33/13, 0, -3, -9/2]
 [ 10/13, 22/13, 0, 2, 3]  🚩 OrthZerlSym.m
    
```

$$3. a) P^2 = (v^0 v^{0T})^2 = v^0 \underbrace{v^{0T} v^0}_{=|v^0|^2=1} v^{0T} = P,$$

$$P^3 = P^2 P = P P = P, \dots, P^n = P.$$

$$b) Q^2 = (I - P)(I - P) = I^2 - IP - PI + P^2 \stackrel{(2.28)}{=} I - 2P + P = I - P = Q,$$

$$Q^3 = Q^2 Q = Q Q = Q, \dots, Q^n = Q.$$

Es ist also $P^n = P$ und $Q^n = Q$. Deutung: P bzw. Q beschreiben die Projektionen auf v bzw. die dazu senkrechte Richtung. Der Vektor $P^2 a = P(Pa)$ ist dann die Projektion des bereits projizierten Vektors Pa und deshalb identisch mit dem Ergebnis der ersten Projektion. Für höhere Potenzen und die Matrix Q , welche die Projektion auf die zu v senkrechte Richtung beschreibt, gilt eine identische Argumentation.

2.7 Mit den Bezeichnungen aus Bild 17 ist

$$Orth_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) \stackrel{(2.56)}{=} (I - \mathbf{c}^0 \mathbf{c}^{0T}) \mathbf{b} \tag{56}$$

$$\stackrel{(8)}{=} \stackrel{(6)}{=} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 6 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 36 & 36 \\ 36 & 36 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \tag{58}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \tag{59}$$

$$S_1 = B + Orth_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

$$D_1 = B + 2Orth_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

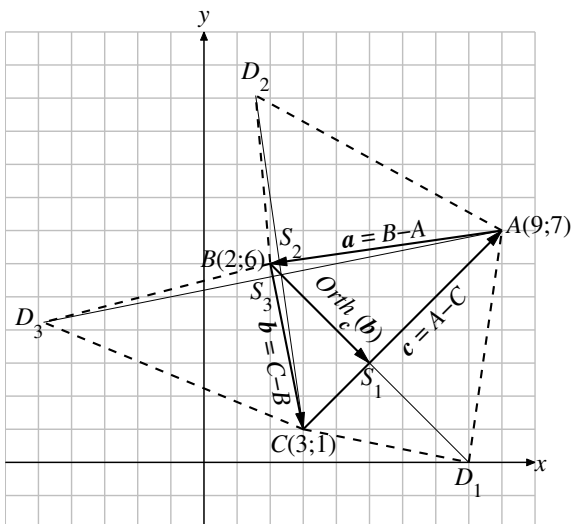
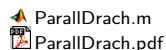


Bild 17: zu Aufgabe 2.7



Mit ähnlichen Überlegungen erhält man $Orth_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} -18/25 \\ 126/25 \end{pmatrix}$

und

$$S_2 = C + Orth_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 57/25 \\ 151/25 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

$$D_2 = C + 2Orth_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}) = \begin{pmatrix} 39/25 \\ 277/25 \end{pmatrix}, \quad (63)$$

$$Orth_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -90/13 \\ -18/13 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

$$S_3 = A + Orth_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 27/13 \\ 73/13 \end{pmatrix}, \quad (65)$$

$$D_3 = A + 2Orth_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -63/13 \\ 55/13 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

2.8 Wie in (2.76) ist

$$\mathbf{E}' = \begin{pmatrix} | & | \\ \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \cos \alpha & -q \sin \alpha \\ q \sin \alpha & q \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Mit $q = 1,25$, $\alpha = 30^\circ$, $\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ und $O' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ folgt nun

$$P \stackrel{(2.74)}{=} O' + \mathbf{E}'\mathbf{p}' \quad (68)$$

$$\stackrel{(67)}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0,5 \end{pmatrix} + 1,25 \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,25 \\ 1,5 \end{pmatrix} \quad (69)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{5}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad (70)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{5}{4} \begin{pmatrix} -3/4 + \sqrt{3}/8 \\ 1/8 + 3\sqrt{3}/4 \end{pmatrix} \quad (71)$$

$$= \begin{pmatrix} 17/16 + 5\sqrt{3}/32 \\ 21/32 + 15\sqrt{3}/16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,3331\dots \\ 2,2800\dots \end{pmatrix}. \quad (72)$$

2.9 → Bild 19

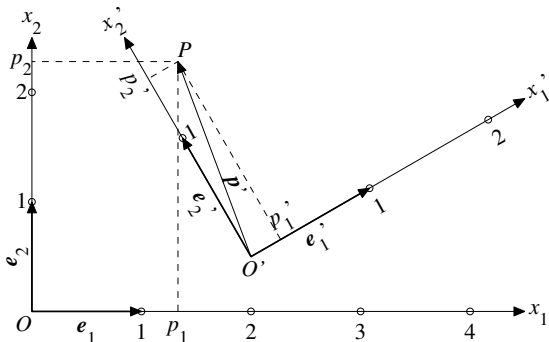


Bild 18: zu Aufgabe 2.8

InvKotrafo2d.m
 InvKotrafo2d.pdf

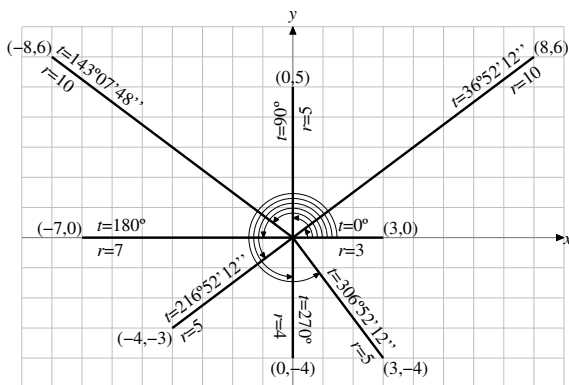


Bild 19: zu Aufgabe 2.9

Polkoord.pdf

2.10

			Zylinderkoordinaten			Geographische Koord.			Kugelkoordinaten		
x	y	z	λ	ρ	h	λ	ϕ	r	λ	θ	r
5	0	4	0°00'00"	5,000	4	sie-	38°39'35"	6,403	sie-	51°20'25"	sie-
2	3	3	56°18'36"	3,606	3	he	39°45'44"	4,690	he	50°14'16"	he
0	5	2	90°00'00"	5,000	2		21°48'05"	5,385		68°11'55"	
-2	3	1	123°41'24"	3,606	1	Zy-	15°30'05"	3,742	Zy-	74°29'55"	geo-
-5	0	0	180°00'00"	5,000	0	lin-	0°00'00"	5,000	lin-	90°00'00"	gra-
-2	-3	-1	-123°41'24"	3,606	-1	der-	-15°30'05"	3,742	der-	105°30'05"	ph.
0	-5	-2	-90°00'00"	5,000	-2	ko-	-21°48'05"	5,385	ko-	111°48'05"	Ko-
2	-3	-3	-56°18'36"	3,606	-3	ord.	-39°45'44"	4,690	ord.	129°45'44"	ord.

2.11 Koordinatenflächen → Bild 20

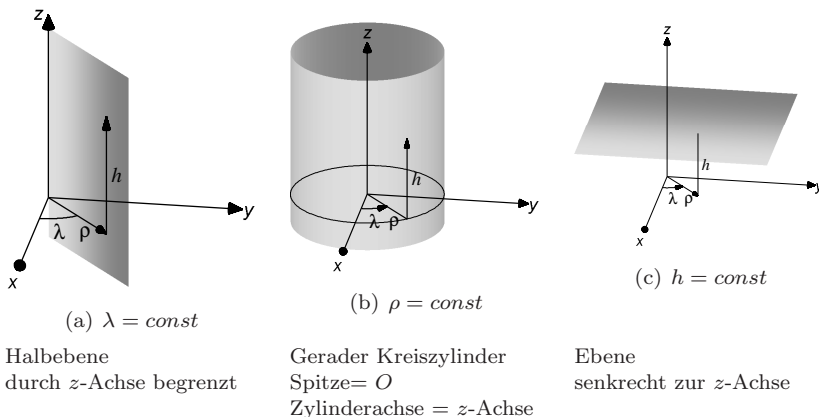


Bild 20: Koordinatenflächen der Zylinderkoordinaten

[KoordinatenflZyl.m](#)
[KoordinatenflZyl.pdf](#)

Koordinatenlinien: Variation von λ bei festem ρ und h

→ zur (x, y) -Ebene parallele Kreise,

Variation von ρ bei festem λ und h

→ von der z -Achse ausgehende, zur (x, y) -Ebene parallele Strahlen,

Variation von h bei festem λ und ρ

→ zur (x, y) -Ebene senkrechte Geraden.

2.12 Gemäß Seite 83 der Studienhilfe beträgt der sphärische Abstand zwischen Neubrandenburg und Rio de Janeiro $1,5816 \dots$ Erdradien. Wählt man auch hier als Längeneinheit einen Erdradius, so folgt für den EUKLIDischen Abstand

$$d(\text{NB}, \text{Rio}) \stackrel{(2.45)}{=} 2 \sin \frac{1,5816 \dots}{2} = 1,4218 \dots \text{ Erdradien} \approx 9058 \text{ km.} \tag{73}$$

2.13 Wie in (2.135)ff erhält man 1. 10151 km, 2. 3002 km.

2.14 Da alle Parallelogramme denselben Flächeninhalt haben, betrachten wir nur das von den in (6) und (7) definierten Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannte Parallelogramm. Dessen Inhalt ist

$$V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \stackrel{(2.142)}{=} |a_1 b_2 - b_1 a_2| = |(-7) \cdot (-5) - (-1) \cdot 1| = 36. \tag{74}$$

2.15 1. $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 78 \\ 6 \\ -66 \end{pmatrix}$, 3. $\begin{pmatrix} -24 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$, 4. 0, 5. $\frac{1}{2160}$.

2.16 1. a) $\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} v_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} v_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} v_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} v_2 \end{pmatrix}$
 $= \frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix},$

und mit ähnlichen Überlegungen

b) $\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix},$

c) $\begin{pmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}.$

2.

$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ (75)

$\mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$ (76)

2.17 1. $\begin{matrix} 210^\circ \text{ um } z\text{-Achse} & 135^\circ \text{ um } x\text{-Achse} & 90^\circ \text{ um } z\text{-Achse} & \mathbf{v} \\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}} & \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$
 $= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - \sqrt{2} \\ -1 + \sqrt{6} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}} \approx \begin{pmatrix} -3,1462\dots \\ 1,4494\dots \\ -1,4142\dots \end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned}
 2. \text{ a) } & \begin{pmatrix} 45^\circ \text{ um } z\text{-Achse} & 30^\circ \text{ um } x\text{-Achse} & 60^\circ \text{ um } z\text{-Achse} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}\sqrt{2} & -\frac{3}{8}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{5}{8}\sqrt{2} & -\frac{1}{8}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}. \\
 \text{b) } & \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}\sqrt{2} & -\frac{3}{8}\sqrt{6} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{5}{8}\sqrt{2} & -\frac{1}{8}\sqrt{6} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8}\sqrt{2}v_1 - \frac{3}{8}\sqrt{6}v_2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}v_3 \\ \frac{5}{8}\sqrt{2}v_1 - \frac{1}{8}\sqrt{6}v_2 - \frac{1}{4}\sqrt{2}v_3 \\ \frac{1}{4}\sqrt{3}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}v_3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

3. a) Wie in (2.211)ff folgt $\theta = 120^\circ$, $\phi = 60^\circ$, $\psi = 135^\circ$.

b) Das SARRUS-Schema (Studienhilfe, Seite 92) führt auf $\det \mathbf{R} = 1$.

c) Anwendung von (2.2) liefert $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$.

2.18 1. (i), 2. (j), 3. (c), 4. (e), 5. (g), 6. (f), 7. (d), 8. (h), 9. (a), 10. (b).

3.1 Transformiert man die geographischen Koordinaten aus (2.136) mit (2.111) bis (2.113) unter Beachtung der neben Bild 2.23 zusammengestellten Vorzeichenregeln in kartesische, so ergibt sich für die Ortsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} der Punkte A und B

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0,578193\dots \\ 0,136273\dots \\ 0,804438\dots \end{pmatrix}, \quad (77) \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,671289\dots \\ -0,630884\dots \\ -0,389043\dots \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Für die Parameterdarstellung des Großkreises ergibt sich wie in Bild 3.4

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{(2.197)}{=} \begin{pmatrix} 0,454492\dots \\ 0,764953\dots \\ -0,456252\dots \end{pmatrix}, \quad (79) \quad \mathbf{e}'_2 \stackrel{(3.20)}{=} \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{a} \quad (82)$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \stackrel{(2.9)}{=} 0,999941\dots, \quad (80) \quad \mathbf{e}'_3 \stackrel{(3.19)}{=} \begin{pmatrix} 0,454518\dots \\ 0,764998\dots \\ -0,456279\dots \end{pmatrix}, \quad (81) \quad \stackrel{(77)}{=} \begin{pmatrix} 0,677573\dots \\ -0,629449\dots \\ -0,380377\dots \end{pmatrix}, \quad (83)$$

$$P(t) \stackrel{(3.22)}{=} \cos t \mathbf{e}'_1 + \sin t \mathbf{e}'_2 \stackrel{(3.19)}{=} \cos t \mathbf{a} + \sin t \mathbf{e}'_2. \quad (84)$$

Nach (3.23) entspricht dem Bogen von A nach B der Parameterbereich $0 \leq t \leq d_S(A, B)$, wobei der sphärische Abstand $d_S(A, B) = 1,581596\dots$ bereits auf Seite 83 der Studienhilfe berechnet wurde. Die kartesischen Koordinaten der gesuchten Zwischenpunkte Z_1, Z_2 erhält man, indem man in (84) die Parameter $t_1 = \frac{1}{3}d_S(A, B), t_2 = \frac{2}{3}d_S(A, B)$ einsetzt:

$$Z_1 = P(t_1) = \cos\left(\frac{1}{3}d_S(A, B)\right) \mathbf{a} + \sin\left(\frac{1}{3}d_S(A, B)\right) \mathbf{e}'_2, \tag{85}$$

$$Z_2 = P(t_2) = \cos\left(\frac{2}{3}d_S(A, B)\right) \mathbf{a} + \sin\left(\frac{2}{3}d_S(A, B)\right) \mathbf{e}'_2. \tag{86}$$

Einsetzen von (77) und (83) und anschließendes Transformieren in geographische Koordinaten gemäß (2.114) und (2.115) liefert

	x	y	z	λ	ϕ
Z_1	0,84058...	-0,19891...	0,50383...	13°18'49"W	30°15'15"N
Z_2	0,87470...	-0,48008...	0,06641...	28°45'38"W	3°48'29"N

Die Ergebnisse für die Tangentenvektoren $P'(t)$, die Einheitsvektoren \mathbf{e}_O und \mathbf{e}_N in Nord- und Ostrichtungen sowie die Kurse α in den Punkten A, Z_1, Z_2 und B sind in den folgenden Tabellen zusammengefasst.

	$P'(t)$ gemäß (3.24), (3.19), (3.20)			\mathbf{e}_O gemäß (3.28)		
A	0,67757...	-0,62944...	-0,38037...	-0,22940...	0,97333...	0
Z_1	0,29467...	-0,61254...	-0,73345...	0,23027...	0,97312...	0
Z_2	-0,16824...	-0,42929...	-0,88735...	0,48114...	0,87663...	0
B	-0,58547...	-0,12946...	-0,80028...	0,68483...	0,72869...	0

	\mathbf{e}_N gemäß (3.27)			α gemäß (3.31)
A	-0,78298...	-0,18454...	0,59403...	230°11'01"
Z_1	-0,49029...	0,11602...	0,86379...	211°53'08"
Z_2	-0,05822...	0,03195...	0,99779...	207°12'44"
B	0,28349...	-0,26643...	0,92121...	209°41'22"

3.2 Mit der Methode von Seite 83 der Studienhilfe erhält man zunächst $d_S(A, B) = 1,38617\dots$ (Erdradien) ≈ 8831 km. Mit einer zu (77) bis (84) analogen Rechnung ergibt sich

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0,57819\dots \\ 0,13627\dots \\ 0,80443\dots \end{pmatrix}, \tag{87} \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} -0,73675\dots \\ 0,51082\dots \\ 0,44300\dots \end{pmatrix}, \tag{88}$$

$$P(t) \stackrel{(3.22)}{=} \cos t \mathbf{e}'_1 + \sin t \mathbf{e}'_2 \tag{89}$$

und durch Differenziation

$$P'(t) = -\sin t e'_1 + \cos t e'_2. \tag{90}$$

Im nördlichsten (und südlichsten) Großkreisbogenpunkt ist der Tangentenvektor waagrecht; d.h. seine z-Koordinate wird 0. Es sind also die Nullstellen von $P'_3(t)$ zu bestimmen:

$$P'_3(t) \stackrel{(90),(87),(88)}{=} -0,80443 \dots \sin t + 0,44300 \dots \cos t \stackrel{!}{=} 0. \tag{91}$$

$$\Rightarrow \tan t = \frac{0,44300 \dots}{0,80443 \dots} \tag{92}$$

Die einzige Lösung dieser Gleichung im durch (3.23) bestimmten Parameterbereich $0 \leq t \leq d_S(A, B) = 1,38617 \dots$ ist

$$t_U = \arctan \frac{0,44300 \dots}{0,80443 \dots} = 0,50338 \dots \tag{93}$$

Einsetzen in (89) und anschließendes Transformieren in geographische Koordinaten gemäß (2.114) und (2.115) liefert

$$U = \begin{pmatrix} 0,15107 \dots \\ 0,36578 \dots \\ 0,91835 \dots \end{pmatrix}, \tag{94}$$

$$\lambda_U = 67^\circ 33' 34'' \text{O}, \tag{95}$$

$$\phi_U = 66^\circ 41' 13'' \text{N}. \tag{96}$$

Der sphärische Abstand zwischen A und U beträgt nach (93)

$$d_S(A, U) \approx 0,50338 \dots \text{ Erdradien} \approx 3207 \text{ km}. \tag{97}$$

Der Kurs in A, U bzw. B ist $41^\circ 46' 33''$, 90° bzw. $150^\circ 50' 44''$.

3.3 Programm:

```
function NBTokio
clc
deg=pi/180;
R=6371; % Erdradius
dms2rad=inline(' (d+m/60+s/3600)*pi/180 ', 'd', 'm', 's ');
% (deg, min, sec) -> rad
lambdaA= dms2rad(13,15,43); phiA=dms2rad(53,33,22);
% Neubrandenburg
lambdaB=dms2rad(139,32,22); phiB=dms2rad(35,40,21);
% Tokio
delta=500/R; % Abstand der Zwischenpunkte
[xA,yA,zA]=sph2cart(lambdaA,phiA,1);
[xB,yB,zB]=sph2cart(lambdaB,phiB,1);
e1Strich=[xA;yA;zA];
ab=cross(e1Strich,[xB;yB;zB]);
q=norm(ab);
```

```

e3Strich=ab/q;
e2Strich=cross(e3Strich , e1Strich );
dS=acos(dot(e1Strich , [xB;yB;zB]));
tU=atan(e2Strich(3)/ e1Strich(3));
tU=tU+2*pi*(tU<0);
for t=unique([tU 0:delta:dS dS])
    s=R*t;
    Z= cos(t)*e1Strich+sin(t)*e2Strich;
    dZ=-sin(t)*e1Strich+cos(t)*e2Strich;
    [lambda , phi]=cart2sph(Z(1),Z(2),Z(3));
    [dL , mL , sL]=rad2dms(abs(lambda));
    [dB , mB , sB]=rad2dms(abs(phi));
    eN=[-sin(phi)*cos(lambda)
        -sin(phi)*sin(lambda)
        cos(phi)];
    eO=[-sin(lambda)
        cos(lambda)
        0];
    alpha=atan2(dot(eO , dZ) , dot(eN , dZ));
    alpha=alpha+2*pi*(alpha<0);
    [dA , mA , sA]=rad2dms(alpha);
    fprintf(['s=%5.0fkm lambda=%4.0f°%02.0f''%02.0f'' '...
            'phi=%3.0f°%02.0f''%02.0f'' '...
            'alpha=%3.0f°%02.0f''%02.0f'' '],...
            s , dL*sign(dL) , mL , sL , dB*sign(dB) , mB , sB , dA , mA , sA)
    if abs(t-tU) < sqrt(eps)
        fprintf(' U ');
    end
    fprintf('\n')
end

```

```

function [d , m , s]=rad2dms(rad)
    D=rad/pi*180;
    d=fix(D);
    M=(D-d)*60;
    m=fix(M);
    s=(M-m)*60;

```

🚩 NBTokio.m

Ergebnisse:

- s= 0km lambda= 13°15'43" phi= 53°33'22" alpha= 41°46'33"
- s= 500km lambda= 18°44'05" phi= 56°47'34" alpha= 46°16'16"
- s= 1000km lambda= 25°11'27" phi= 59°44'45" alpha= 51°45'57"
- s= 1500km lambda= 32°48'35" phi= 62°19'26" alpha= 58°26'09"
- s= 2000km lambda= 41°42'27" phi= 64°24'43" alpha= 66°23'38"
- s= 2500km lambda= 51°49'60" phi= 65°52'55" alpha= 75°35'13"
- s= 3000km lambda= 62°51'48" phi= 66°37'00" alpha= 85°41'17"

$s = 3207\text{km}$ $\lambda = 67^\circ 33' 34''$ $\phi = 66^\circ 41' 13''$ $\alpha = 90^\circ 00' 00''$ U
 $s = 3500\text{km}$ $\lambda = 74^\circ 11' 29''$ $\phi = 66^\circ 32' 48''$ $\alpha = 96^\circ 05' 18''$
 $s = 4000\text{km}$ $\lambda = 85^\circ 06' 09''$ $\phi = 65^\circ 40' 44''$ $\alpha = 106^\circ 04' 13''$
 $s = 4500\text{km}$ $\lambda = 95^\circ 01' 55''$ $\phi = 64^\circ 05' 37''$ $\alpha = 115^\circ 03' 57''$
 $s = 5000\text{km}$ $\lambda = 103^\circ 42' 26''$ $\phi = 61^\circ 54' 44''$ $\alpha = 122^\circ 48' 01''$
 $s = 5500\text{km}$ $\lambda = 111^\circ 06' 55''$ $\phi = 59^\circ 15' 45''$ $\alpha = 129^\circ 15' 26''$
 $s = 6000\text{km}$ $\lambda = 117^\circ 23' 21''$ $\phi = 56^\circ 15' 17''$ $\alpha = 134^\circ 34' 02''$
 $s = 6500\text{km}$ $\lambda = 122^\circ 42' 42''$ $\phi = 52^\circ 58' 37''$ $\alpha = 138^\circ 54' 33''$
 $s = 7000\text{km}$ $\lambda = 127^\circ 15' 43''$ $\phi = 49^\circ 29' 44''$ $\alpha = 142^\circ 27' 35''$
 $s = 7500\text{km}$ $\lambda = 131^\circ 11' 43''$ $\phi = 45^\circ 51' 36''$ $\alpha = 145^\circ 22' 11''$
 $s = 8000\text{km}$ $\lambda = 134^\circ 38' 17''$ $\phi = 42^\circ 06' 22''$ $\alpha = 147^\circ 45' 44''$
 $s = 8500\text{km}$ $\lambda = 137^\circ 41' 28''$ $\phi = 38^\circ 15' 39''$ $\alpha = 149^\circ 44' 01''$
 $s = 8831\text{km}$ $\lambda = 139^\circ 32' 22''$ $\phi = 35^\circ 40' 21''$ $\alpha = 150^\circ 50' 44''$

3.4 1. Wir berechnen zunächst den Vektor \mathbf{v} von A nach B . Es ist

$$\mathbf{v} = B - A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}. \quad (98)$$

Einen dazu senkrechten Vektor erhalten wir, indem wir die Komponenten von \mathbf{v} vertauschen und bei der ersten das Vorzeichen ändern:

$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Der *normierte* Normalenvektor \mathbf{n}^0 ist dann

$$\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{n}}{5} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}. \quad (99)$$

Für jeden Geradenpunkt P steht der Vektor von A nach P senkrecht auf \mathbf{n}^0 ; es gilt also $\mathbf{n}^0 \cdot (P - A) = 0$. Gemäß (3.53) ist die HESSEsche Normalform damit

$$\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \cdot \left(P - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0 \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \cdot P + 0,2 = 0. \quad (100)$$

2. Setzen wir in die im Aufgabenteil 1 berechnete HESSEsche Normalform für P die Koordinaten des Punktes C ein, so folgt

$$\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ -18 \end{pmatrix} + 0,2 = 15 \quad (101)$$

und für den Punkt D entsprechend

$$\begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -19 \end{pmatrix} + 0,2 = -20. \quad (102)$$

Da wir verschiedene Vorzeichen erhalten, liegen C und D auf verschiedenen Seiten von g .

3. Die gesuchten Abstände sind die absoluten Beträge der im Aufgabenteil 2 berechneten Zahlen; C hat von g den Abstand 15 , und D hat von g den Abstand 20 . Der kürzeste Abstand zwischen g und C wird im Lotfußpunkt

$$C_g \stackrel{(3.51)}{=} C - 15 \mathbf{n}^0 = \begin{pmatrix} 32 \\ -18 \end{pmatrix} - 15 \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -27 \end{pmatrix} \quad (103)$$

angenommen, der zwischen g und D entsprechend in

$$D_g \stackrel{(3.51)}{=} D - 20 \mathbf{n}^0 = \begin{pmatrix} -11 \\ -19 \end{pmatrix} + 20 \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}. \quad (104)$$

3.5 Die gedrehte Parabel hat die Parameterdarstellung

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos 285^\circ & -\sin 285^\circ \\ \sin 285^\circ & \cos 285^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{Parabel} \\ y = x^2}}{=} \begin{pmatrix} t \cos 285^\circ - t^2 \sin 285^\circ \\ t \sin 285^\circ + t^2 \cos 285^\circ \end{pmatrix}. \quad (105)$$

Im Schnittpunkt mit der x -Achse ist $y = 0$, also

$$0 = t \sin 285^\circ + t^2 \cos 285^\circ \Rightarrow t = -\tan 285^\circ. \quad (106)$$

Einsetzen in die x -Koordinate von (105) liefert

$$x^* = -\sin 285^\circ - \tan^2 285^\circ \sin 285^\circ \quad (107)$$

$$= -\sin 285^\circ (\tan^2 285^\circ + 1) = 14,4195\dots \quad (108)$$

3.6 Für die Leitlinie (hier die Schraubenlinie von Seite 46 und 109 der Studienhilfe) ist $M(s) = \begin{pmatrix} R \cos s \\ R \sin s \\ \frac{hs}{2\pi} \end{pmatrix}$ und damit $M'(s) = \begin{pmatrix} -R \sin s \\ R \cos s \\ \frac{h}{2\pi} \end{pmatrix}$.

Mit $\mathbf{z} = \mathbf{e}_3$ sind nun

$$\mathbf{z} \times M'(s) \stackrel{(2.197)}{=} \begin{pmatrix} -R \cos s \\ -R \sin s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (109) \quad \mathbf{n}_1(s) \stackrel{(3.85)}{=} \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{z} \times M'(s)| \stackrel{(2.9)}{=} R, \quad (110) \quad (111)$$

und

$$\mathbf{n}_1(s) \times M'(s) \stackrel{(2.197)}{=} \begin{pmatrix} -\frac{h \sin s}{2\pi} \\ \frac{h \cos s}{2\pi} \\ -R \end{pmatrix}, \quad (112) \quad \mathbf{n}_2(s) \stackrel{(3.85)}{=} \begin{pmatrix} -\frac{h \sin s}{\sqrt{h^2 + 4R^2\pi^2}} \\ \frac{h \cos s}{\sqrt{h^2 + 4R^2\pi^2}} \\ \frac{2R\pi}{-\sqrt{h^2 + 4R^2\pi^2}} \end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{n}_1(s) \times M'(s)| \stackrel{(2.9)}{=} \frac{\sqrt{h^2 + 4R^2\pi^2}}{2\pi}, \quad (113) \quad (114)$$

Die Profilkurve (Kreis um O vom Radius r) ist in der (x, y) -Ebene durch

$$c_1(t) = r \cos t \quad (115) \quad c_2(t) = r \sin t \quad (116)$$

gegeben. Nach (3.86) lautet dann die Darstellung des Rohrkörpers

$$P(s, t) = \begin{pmatrix} R \cos s \\ R \sin s \\ \frac{hs}{2\pi} \end{pmatrix} - r \cos t \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r \sin t}{\sqrt{h^2 + 4R^2\pi^2}} \begin{pmatrix} -h \sin s \\ h \cos s \\ -2R\pi \end{pmatrix}. \quad (117)$$

3.7 Nach (F3d) ist

$$A_{\text{Kugelbereich}} = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| \frac{\partial P}{\partial \lambda} \times \frac{\partial P}{\partial \phi} \right| d\lambda d\phi \quad (118)$$

$$\stackrel{(3.90)}{=} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| \begin{pmatrix} -R \cos \phi \sin \lambda \\ R \cos \phi \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R \sin \phi \cos \lambda \\ -R \sin \phi \sin \lambda \\ R \cos \phi \end{pmatrix} \right| d\lambda d\phi \quad (119)$$

$$\stackrel{(2.197)}{=} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left| \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \phi \cos \lambda \\ R^2 \cos^2 \phi \sin \lambda \\ R^2 \cos \phi \sin \phi \sin^2 \lambda + R^2 \cos \phi \sin \phi \cos^2 \lambda \end{pmatrix} \right| d\lambda d\phi \quad (120)$$

$$\stackrel{(2.32)}{=} \int_{\phi_0}^{\phi_1} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \underbrace{|R^2 \cos \phi|}_{\substack{\geq 0 \text{ für} \\ -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2}} \left| \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) \end{pmatrix} \right| d\lambda d\phi \quad (121)$$

$$\stackrel{(2.9)}{=} \sqrt{\cos^2 \phi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + \sin^2 \phi}$$

$$= 1, \text{ da } \cos^2 + \sin^2 = 1$$

$$= [\lambda R^2 \cos \phi]_{\lambda_0}^{\lambda_1} = (\lambda_1 - \lambda_0) R^2 \cos \phi$$

$$= [(\lambda_1 - \lambda_0) R^2 \sin \phi]_{\phi_0}^{\phi_1} = R^2 (\lambda_1 - \lambda_0) (\sin \phi_1 - \sin \phi_0). \quad (122)$$

Für die Oberfläche der gesamten Kugel folgt daraus mit $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 2\pi, \phi_0 = -\frac{\pi}{2}, \phi_1 = \frac{\pi}{2}$ die bekannte Formel $O_{\text{Kugel}} = 4\pi R^2$.

3.8 Nach (V) ist

$$V_{\text{Ellipsoid}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \det \left(\frac{\partial P}{\partial r}, \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \frac{\partial P}{\partial \phi} \right) \right| dr d\lambda d\phi \quad (123)$$

$$\stackrel{(3.93)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left| \det \begin{pmatrix} a \cos \phi \cos \lambda & -ra \cos \phi \sin \lambda & -ra \sin \phi \cos \lambda \\ b \cos \phi \sin \lambda & rb \cos \phi \cos \lambda & -rb \sin \phi \sin \lambda \\ c \sin \phi & 0 & rc \cos \phi \end{pmatrix} \right| dr d\lambda d\phi \quad (124)$$

$$\stackrel{(2.201)}{=} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |r^2 abc \cos^3 \phi \cos^2 \lambda + r^2 abc \cos \phi \sin^2 \phi \sin^2 \lambda + r^2 abc \cos \phi \sin^2 \phi \cos^2 \lambda + r^2 abc \cos^3 \phi \sin^2 \lambda| dr d\lambda d\phi \quad (125)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |r^2 abc \cos^3 \phi \underbrace{(\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda)}_{=1} + r^2 abc \cos \phi \sin^2 \phi \underbrace{(\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda)}_{=1}| dr d\lambda d\phi \quad (126)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 |r^2 abc \cos^3 \phi + r^2 abc \cos \phi \sin^2 \phi| dr d\lambda d\phi \quad (127)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{|r^2 abc \cos \phi (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)|}_{\geq 0} dr d\lambda d\phi \quad (128)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[\frac{1}{3} r^3 abc \cos \phi \right]_0^1}_{= \frac{1}{3} abc \cos \phi} d\lambda d\phi \quad (129)$$

$$= \left[\frac{1}{3} abc \lambda \cos \phi \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3} abc \cos \phi$$

$$= \left[\frac{2\pi}{3} abc \sin \phi \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4\pi}{3} abc \quad (130)$$

3.9 Für den Parabelbogen folgt durch Vertauschen von (x, y) und (z, x) in Bild 3.14(b) und Bild 3.23(a) aus (3.64) die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ \frac{t^2}{2p} \end{pmatrix} \text{ und daraus für das Paraboloid } P(\lambda, t) \stackrel{(3.81)}{=} \begin{pmatrix} t \cos \lambda \\ t \sin \lambda \\ \frac{t^2}{2p} \end{pmatrix}.$$

Nach (3.82) sind die Parameter durch $0 \leq t \leq a$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ begrenzt.

Für die Fläche gilt

$$A_{\text{Rotationsparaboloid}} \stackrel{\substack{(3.101) \text{ mit} \\ \rho(t) = t, \\ h(t) = t^2/2p}}{=} 2\pi \int_0^a t \sqrt{\left(\frac{t}{p}\right)^2 + 1} dt \quad (131)$$

$$\begin{aligned} \text{Substitution} \\ u = (t/p)^2 + 1, \\ du = 2t/p^2 dt \end{aligned} \quad 2\pi \frac{p^2}{2} \int_1^{(a/p)^2+1} \sqrt{u} du = \pi p^2 \left[\frac{u^{3/2}}{3/2} \right]_1^{(a/p)^2+1} \quad (132)$$

$$= \frac{2}{3} \pi p^2 \left(\left(\left(\frac{a}{p} \right)^2 + 1 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) \quad (133)$$

$$= \frac{2}{3} \pi p^2 \left(\frac{(a^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^3} - 1 \right) = \frac{2}{3} \pi \left(\frac{(a^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p} - p^2 \right). \quad (134)$$

3.10 Mit den Bezeichnungen aus (3.141,3.142) erhält man die Zwischenergebnisse

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 53 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}, \quad (135) \quad |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|^2 = 2982, \quad (136)$$

$$t^* = -0,88128\dots, \quad (137)$$

$$s^* = -1,18443\dots \quad (138)$$

und das Endergebnis

$$P(t^*) = \begin{pmatrix} 4,88128\dots \\ -3,28772\dots \\ -3,40643\dots \end{pmatrix}, \quad (139) \quad Q(s^*) = \begin{pmatrix} -7,63112\dots \\ -2,81556\dots \\ -6,47551\dots \end{pmatrix}. \quad (140)$$

3.11 Analog zur Berechnung des Giebelpunktes F auf Seite 140 der Studienhilfe erhält man hier G als den Schnittpunkt der Seitenflächen $BCHGF$, $AEGF$ und $DEGH$. Die Normalenvektoren zu $BCHGF$ und $AEGF$ sind bereits in der Tabelle auf Seite 140 der Studienhilfe berechnet (dort mit \mathbf{n}_1 und \mathbf{n}_3 bezeichnet). Der Normalenvektor zu $DEGH$ ergibt sich

$$\text{mit ähnlichen Methoden zu } \mathbf{n}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{33}{2} \\ \frac{33}{2} \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16,5 \\ 28,578838\dots \end{pmatrix}.$$

Wählt man als Aufpunkte $P_1 = B$, $P_3 = A$, $P_4 = E$ so wird das Gleichungssystem (3.144) zu $\begin{pmatrix} -\mathbf{n}_1^T \\ -\mathbf{n}_3^T \\ -\mathbf{n}_4^T \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \cdot B \\ \mathbf{n}_2 \cdot A \\ \mathbf{n}_4 \cdot E \end{pmatrix}$ und nach Ein-

setzen zu
$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{75}{2}\sqrt{2} & \frac{75}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{25}{2} & 21 & \frac{1}{2}\sqrt{7167} \\ 0 & \frac{33}{2} & \frac{33}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} G = \begin{pmatrix} 750\sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{825}{2} \end{pmatrix}.$$
 Löst man dieses

System mit der CRAMERSchen Regel (Satz 2.7), so ergibt sich mit den dortigen Bezeichnungen

$$\det \mathbf{A} = -\frac{61875}{8}\sqrt{6} - \frac{61875}{8}\sqrt{2} = -29883,330250\dots, \quad (141)$$

$$\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = 259875\sqrt{6} - \frac{111375}{8}\sqrt{14334} - \frac{1299375}{4}\sqrt{2} \quad (142)$$

$$= -1489629,377448\dots, \quad (143)$$

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3) = \frac{309375}{2}\sqrt{6} - \frac{1546875}{8}\sqrt{2} = 105453,994049\dots, \quad (144)$$

$$\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = -\frac{2784375}{8}\sqrt{2} = -492212,610966\dots \quad (145)$$

Gemäß Satz 2.7 ist $x_1 = \frac{\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}{\det \mathbf{A}}$, $x_2 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}_3)}{\det \mathbf{A}}$, $x_3 = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b})}{\det \mathbf{A}}$.

Die so berechneten Unbekannten sind die Koordinaten des Punktes G :

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{357}{5} + \frac{189}{5}\sqrt{3} - \frac{9}{10}\sqrt{7167} + \frac{27}{10}\sqrt{2389} \\ -\frac{85}{2} + \frac{45}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{45}{2} + \frac{45}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49,848171\dots \\ -3,528856\dots \\ 16,471143\dots \end{pmatrix}. \quad (146)$$

Für H erhält man mit ähnlichen Überlegungen

$$H = \begin{pmatrix} \frac{195}{2} - \frac{45}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{85}{2} + \frac{45}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{45}{2} + \frac{45}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58,528856\dots \\ -3,528856\dots \\ 16,471143\dots \end{pmatrix}. \quad (147)$$

3.12 Den Richtungsvektor \mathbf{w} der Geraden h erhält man durch Drehung von \mathbf{v} um 25° :

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \cos 25^\circ & -\sin 25^\circ \\ \sin 25^\circ & \cos 25^\circ \end{pmatrix} \mathbf{v} \quad (148)$$

$$= \begin{pmatrix} 0,9063\dots & -0,4226\dots \\ 0,4226\dots & 0,9063\dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,4093\dots \\ -2,3573\dots \end{pmatrix}. \quad (149)$$

Damit hat h die Parameterdarstellung

$$P(t) = E + t\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -4,9 \\ -6,3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4,4093\dots \\ -2,3573\dots \end{pmatrix}. \quad (150)$$

Die Gerade g hat wie in Aufgabe 3.4 gegeben bzw. berechnet den Aufpunkt $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0, 8 \\ 0, 6 \end{pmatrix}$. Nach (3.165) ist der Schnittpunkt von g und h dann

$$S = E - \frac{(E - A) \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 10, 7502 \dots \\ -14, 6670 \dots \end{pmatrix}. \tag{151}$$

3.13 1. Da Φ zu beiden Geraden g_1, g_2 parallel ist, spannen Richtungsvektoren von g_1 und g_2 auch die Ebene Φ auf. Einen Aufpunkt P_0 für Φ erhält man als Mittelpunkt der Aufpunkte P_1 und P_2 von g_1 und g_2 . Eine Parameterdarstellung für Φ ist damit $P(s, t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 7, 5 \\ -8, 8 \\ 11, 3 \end{pmatrix}}_{P_0} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}_2}$.

Der Normalenvektor \mathbf{n} ist — wie in der Studienhilfe auf Seite 129 ausgeführt — das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren. Die HESSEsche Normalform lautet also

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0, 40824 \dots \\ 0, 81649 \dots \\ 0, 40824 \dots \end{pmatrix}}_{\mathbf{n}^0 = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)^0} \cdot \underbrace{\left(P - \begin{pmatrix} 7, 5 \\ -8, 8 \\ 11, 3 \end{pmatrix} \right)}_{P - P_0} = 0. \tag{152}$$

2. Die gesuchten Abstände und Fußpunkte sind

$$d(A, \Phi) \stackrel{(3.112)}{=} |\mathbf{n}^0 \cdot (A - P_0)| = 2, 93938 \dots, \tag{153}$$

$$A_\Phi \stackrel{(3.111)}{=} A - (\mathbf{n}^0 \cdot (A - P_0)) \mathbf{n}^0 = \begin{pmatrix} -22, 8 \\ 22, 4 \\ -20, 8 \end{pmatrix}, \tag{154}$$

$$d(A, g_1) \stackrel{(3.132)}{=} |\mathbf{v}_1^0 \cdot (A - P_1)| = 10, 28785 \dots, \tag{155}$$

$$A_{g_1} \stackrel{(3.127)}{=} P_1 + (\mathbf{v}_1^0 \cdot (A - P_1)) \mathbf{v}_1^0 = \begin{pmatrix} -15, 16 \\ 20, 88 \\ -26, 6 \end{pmatrix}, \tag{156}$$

$$d(A, g_2) \stackrel{(3.132)}{=} |\mathbf{v}_2^0 \cdot (A - P_2)| = 3, 23320 \dots, \tag{157}$$

$$A_{g_2} \stackrel{(3.127)}{=} P_2 + (\mathbf{v}_2^0 \cdot (A - P_2)) \mathbf{v}_2^0 = \begin{pmatrix} -20, 99175 \dots \\ 22, 67628 \dots \\ -21, 96082 \dots \end{pmatrix}. \tag{158}$$

3. Da jede der beiden Geraden vollständig auf einer Seite von Φ liegt, reicht es, die Lage der Aufpunkte zu bestimmen. Wir setzen diese in die

HESSEsche Normalform (152) ein:

$$\begin{pmatrix} 0,40824\dots \\ 0,81649\dots \\ 0,40824\dots \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -21,6 \\ 24,8 \\ -19,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7,5 \\ -8,8 \\ 11,3 \end{pmatrix} \right) = 2,9\dots > 0, \quad (159)$$

$$\begin{pmatrix} 0,40824\dots \\ 0,81649\dots \\ 0,40824\dots \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7,5 \\ -8,8 \\ 11,3 \end{pmatrix} \right) = -0,4\dots < 0, \quad (160)$$

$$\begin{pmatrix} 0,40824\dots \\ 0,81649\dots \\ 0,40824\dots \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 16 \\ -19,6 \\ 25,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7,5 \\ -8,8 \\ 11,3 \end{pmatrix} \right) = 0,4\dots > 0. \quad (161)$$

Damit liegen gemäß Bild 3.24 A und g_2 auf der \mathbf{n} zugewandten Seite und g_1 auf der \mathbf{n} abgewandten Seite von Φ ; insbesondere liegt A auf derselben Seite wie g_2 .

4. Es ist also der Schnittpunkt D der durch A und A_{g_2} definierten Geraden mit der Ebene Φ zu berechnen:

$$D \stackrel{(3.166)}{=} A - \frac{(A - P_0) \cdot \mathbf{n}}{(A - A_{g_1}) \cdot \mathbf{n}} (A - A_{g_1}) = \begin{pmatrix} -16,08 \\ 21,44 \\ -25,6 \end{pmatrix}. \quad (162)$$

3.14 Mit (3.167)ff entsprechenden Bezeichnungen erhält man

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0,57583\dots \\ -0,51146\dots \\ 0,63782\dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,85956\dots \\ -0,04686\dots \\ -0,50887\dots \end{pmatrix}, \quad (163)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0,29016\dots \\ 0,84127\dots \\ 0,41265\dots \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 0,20080\dots \\ -0,97190\dots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (164)$$

die quadratische Gleichung (3.169) wird zu

$$0,96222\dots t^2 - 1,51875\dots t - 0,01507\dots = 0 \quad (165)$$

und hat die Lösungen

$$t_1 = 1,58824\dots, \quad t_2 = -0,00986\dots \quad (166)$$

Die daraus folgenden Schnittpunkte sind

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0,66164\dots \\ 0,36424\dots \\ 0,65539\dots \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0,19793\dots \\ -0,98020\dots \\ -0,00407\dots \end{pmatrix}. \quad (167)$$

Umrechnen in geographische Koordinaten gemäß (2.114)ff ergibt

$$28^\circ 50' \text{ Ost, } 40^\circ 57' \text{ Nord (Istanbul),} \tag{168}$$

$$78^\circ 35' \text{ West, } 0^\circ 14' \text{ Süd (Quito).} \tag{169}$$

Da die Tour im Mittelmeer begann, ist Istanbul die wahrscheinlichere Lösung.

4.1 Die Transformationsmatrix ist nach (4.1) durch

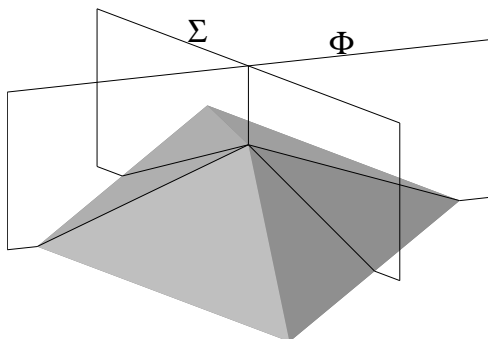
$$\begin{aligned}
 \mathbf{T} &= \underbrace{\begin{matrix} \mathbf{z} \text{ gemäß (4.2)} \\ \begin{pmatrix} 50 \\ -60 \\ 100 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{\mathbf{u}^T \text{ gemäß (4.4)}} \begin{matrix} \mathbf{u}^T \text{ gemäß (4.4)} \\ (-0,2 \ 0,5 \ 1 \ 97,6) \end{matrix} - \underbrace{\begin{matrix} \mathbf{u} \\ \begin{pmatrix} -0,2 \\ 0,5 \\ 1 \\ 97,6 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{=157,6} \cdot \underbrace{\begin{matrix} \mathbf{z} \\ \begin{pmatrix} 50 \\ -60 \\ 100 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{\mathbf{I}} \begin{matrix} \mathbf{I} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{170} \\
 &= \begin{pmatrix} -10 & 25 & 50 & 4880 \\ 12 & -30 & -60 & -5856 \\ -20 & 50 & 100 & 9760 \\ -0,2 & 0,5 & 1 & 97,6 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -167,6 & 25 & 50 & 4880 \\ 12 & -187,6 & -60 & -5856 \\ -20 & 50 & -57,6 & 9760 \\ -0,2 & 0,5 & 1 & -60 \end{pmatrix} \tag{171}
 \end{aligned}$$

gegeben. Zur Berechnung der Bildpunkte sind die homogenen Koordinaten der Eckpunkte von links mit \mathbf{T} zu multiplizieren. Insbesondere beim automatisierten Rechnen ist dafür spaltenweises Zusammenfassen sinnvoll:

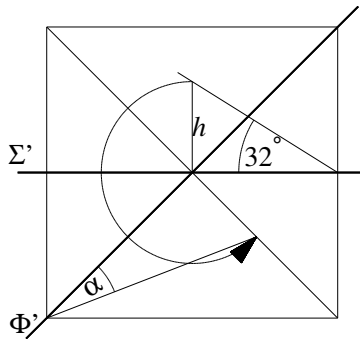
$$\begin{aligned}
 &\begin{matrix} \mathbf{T} \text{ gemäß (171)} \\ \begin{pmatrix} -167,6 & 25 & 50 & 4880 \\ 12 & -187,6 & -60 & -5856 \\ -20 & 50 & -57,6 & 9760 \\ -0,2 & 0,5 & 1 & -60 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{A}, \dots, \mathbf{H} \text{ gemäß Seite 27 und Studienhilfe, Seiten 140ff} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 75 & 75 & 42 & 8,26\dots & 49,84\dots & 58,52\dots \\ 0 & -20 & -20 & 25 & 25 & -11,73\dots & -3,52\dots & -3,52\dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,26\dots & 16,47\dots & 16,47\dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4880 & 4380 & -8190 & -7065 & -1534,2 & 3614,8\dots & -2739,2\dots & -4194,1\dots \\ -5856 & -2104 & -1204 & -9646 & -10042 & -4050,7\dots & -5584,0\dots & -5479,9\dots \\ 9760 & 8760 & 7260 & 9510 & 10170 & 8531,9\dots & 7637,8\dots & 7464,2\dots \\ -60 & -70 & -85 & -62,5 & -55,9 & -59,2\dots & -55,2\dots & -56,9\dots \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die Bildpunktkoordinaten erhält man nach (4.7), indem man die Elemente in den Zeilen 1 bis 3 durch das jeweilige Element der vierten Zeile dividiert:

A'	B'	C'	D'	E'	F'	G'	H'
$-81, \bar{3}$	$-62,5\dots$	$96,3\dots$	$113,0\dots$	$27,4\dots$	$-61,0\dots$	$49,5\dots$	$73,5\dots$
$97,6$	$30,0\dots$	$14,1\dots$	$154,3\dots$	$179,6\dots$	$68,3\dots$	$101,0\dots$	$96,1\dots$
$-162, \bar{6}$	$-125,1\dots$	$-85,4\dots$	$-152,1\dots$	$-181,9\dots$	$-143,9\dots$	$-138,2\dots$	$-130,9\dots$



(a) Schnittebenen



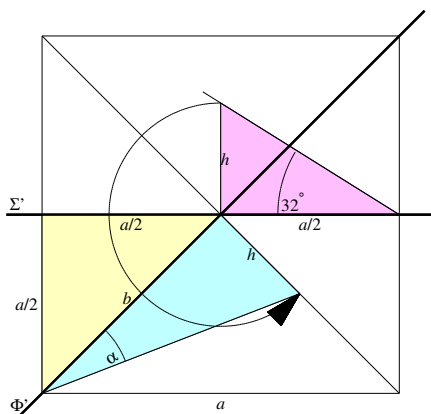
(b) Umklappungen

Bild 21: zu Aufgabe 4.2,1



4.2 1. Die Cheops-Pyramide sowie die Ebenen Σ und Φ sind in Bild 21(a) dargestellt; die entsprechenden Umklappungen in kotierter Projektion in Bild 21(b), wo sich auch der gesuchte Neigungswinkel mit circa 24° ablesen lässt.

2. Mit Hilfe der in Bild 22 farbiger unterlegten Dreiecke folgt mit elementarer Geometrie und Trigonometrie $\alpha = \arctan \frac{\tan 32^\circ}{\sqrt{2}} = 23^\circ 50' 18''$.



$$\tan 32^\circ = \frac{h}{a/2} \Rightarrow h = \frac{a}{2} \tan 32^\circ \quad (172)$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \frac{a^2}{4}} \quad (173)$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \quad (174)$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{b} \stackrel{(172), (174)}{=} \frac{\frac{a}{2} \tan 32^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2} a} \quad (175)$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan \frac{\tan 32^\circ}{\sqrt{2}} = 23^\circ 50' 18'' \quad (176)$$

Bild 22: zu Aufgabe 4.2,2



4.3 In Bild 23 sind die in der Aufgabenstellung genannten Schritte in verschiedenen Farben dargestellt.

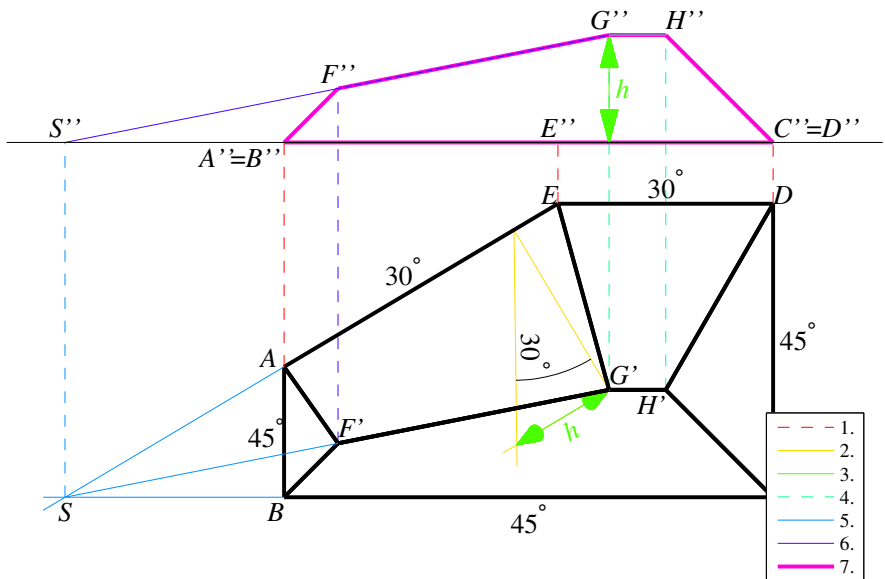


Bild 23: zu Aufgabe 4.3

